International Science and Technology Journal
المجلة الدولية للعلوم والتقنية
Volume 37 العدد
Part 1 المجلد
المجلة الدولية للعلوم والتقنية
International Science and Technology Journal
ISTJ

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

Received	2025/07/25	تم استلام الورقة العلمية في
Accepted	2025/08/19	تم قبول الورقة العلمية في
Published	2025/08/21	تم نشر الورقة العلمية في

الطرق العددية لإيجاد جذور المعادلات الغير خطية ذات شرط التوقف الداخلي (دراسة مقارنة)

د. هناء المنير أحمد لوكه

كلية التربية أبو عيسى – جامعة الزاوية – **ليبيا**

h.louka@zu.edu.ly

ملخص البحث:

يتلخص موضوع البحث في اجراء دراسة مقارنة لتحديد أفضل الطرق العددية لإيجاد جذور المعادلات الغير خطية ذات شرط التوقف الداخلي، حيث تم أخذ ثلاثة امثلة لمعرفة أفضل الطرق العددية لإيجاد جذور المعادلات الغير خطية (اللاخطية)، وحساب القيمة الدقيق للأمثلة سابقة الذكر.

تم حساب قيمة الخطأ النسبي المئوي لكل من الامثلة المذكورة أعلاه، وذلك لغرض دراسة النتائج ومقارنتها مع بعضها البعض وكانت النتائج مقربة إلى ستة أرقام عشرية بعد الفاصلة.

ثم دُونت النتائج على شكل جدول لتسهيل عملية المقارنة، حيث أظهرت النتائج أن استخدام طريقة التكامل لحساب الحل العددي للمعادلة الغير خطية ذات شرط التوقف الداخلي تكون النتائج دقيقة جدًا ومدى تقاربها من القيم الحقيقية هي الأفضل، بالإضافة لكونها طريقة سهلة وسريعة في الحساب ولها دور كبير في إيجاد الحل التقريبي للمعادلات الغير خطية من الدرجات العليا، وبمقارنة عدد التكرارات لإيجاد الحل بهذه الطريقة مع الطرق الأخرى سنجد أن عدد التكرارات يتقلص مقارنة مع الطرق العددية الأخرى.

ولكن تساوي الجذور الحقيقية مع الجذور التقريبية لا يعني أن هذه الطريقة العددية التي تم استخدامها لإيجاد الجذر دقيقة مئة في المئة حيث أنه قد تم تقريب النتائج الحسابية في الأمثلة السابقة لستة ارقام عشرية.

الكلمات المفتاحية: الدالة، الخطأ الفعلي، الخطأ النسبي، المعادلة الخطية، المعادلة الغير خطية، شرط التوقف الداخلي.

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

International Science and Technology Journal
المجلة الدولية للعلوم والتقنية
Volume 37 العدد
Part 1 المجلد
المجلة الدولية للعلوم والتقنية
International Science and Technology Journal
ISTJ

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

Numerical methods for finding the roots of nonlinear equations with an internal discontinuity condition (a comparative study)

Hana Almuneer Ahmed Louka

University of Zawia - Libya

h.louka@zu.edu.ly

Abstract:

The topic of the research to conduct comparative study to determine the best numerical methods for finding the roots of Non-Linear Algebraic Equations where it with an internal stopping condition was taken three examples to know the best method to solve nonlinear equation for the previous examples

We calculated the percent error for these examples in order to make a comparison between the results were rounded to six places after comma.

The results written in tabular format to facilitate comparison, the results showed that using integration method to compute the numerical solution of the nonlinear equation with an internal stopping condition yields highly accurate results, with the degree of proximity to the actual values being the best. Additionally, it is an easy and quick method for calculations and plays a significant role in finding approximate solutions to higher-order nonlinear equations. When comparing the number of iterations required to find the solution using this method with other methods, the number of iterations is reduced compared to other numerical methods. However, the equality of the real roots with the approximate roots does not mean that this numerical method used to find the root is 100% accurate, as the calculated results in the previous examples were approximated to six decimal places after the decimal point.

Keywords: Function, Actual Error, Relative Error, Linear Equation, Nonlinear Equation, Internal Stopping Condition.

المقـــدمة:

قد لا يكون إيجاد جذور المعادلات الغير خطية سهلاً في كثير من الحالات العملية، حيث قد يكون لبعض تلك المعادلات العديد من الجذور وتحديد واحد منها فقط قد لا يكون أمراً سهلاً. فعلى سبيل المثال لو نظرنا الى المعادلة:

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

$$f(x) = e^x - \cos(x)$$

قد تبدو للوهلة الأولى بسيطة الا أنها في الواقع لها عدد كبير من الجذور وإيجاد جذر واحد فقط منها تحليلاً ليس بالأمر السهل. وبالرغم من صعوبة أو استحالة إيجاد جذور مثل هذه المعادلات في بعض الأحيان بطرق رياضية صريحة فإن استخدام الطرق العددية يوفر وسيلة مناسبة لإيجاد تلك الجذور، أو على الأقل إيجاد تقريب مناسب لها، لذلك يتم اللجوء الى الطرق العددية لتقدير جذور المعادلات اللاخطية.

لإيجاد الجذر (الحل) باستخدام الطرق العددية هناك عدة معطيات قد يتم اعطاؤها في المسألة كتخمينين مبدئيين للجذر لبدء عملية التكرار أو وجود شرط إيقاف خطوات الحل بدقة معينة، ولكن في هذا البحث ستكون المسائل مقتصرة على الدالة والحل الدقيق فقط بدون وجود شرط إيقاف معطاة في المسألة ولكننا سنستنبط شرط إيقاف داخلي:

شرط التوقف الداخلي:

$$|x_{n+1} - x_n| = |x_n - x_{n-1}| \text{ أو } f(x_n) = 0$$

محـــاور البحـــث:

المحـــــور الاول: المتمثل في دراسة بعض الطرق العددية لإيجاد جذور المعادلة اللاخطية.

بفرض أن $y = f(x) = 0$ معادلة غير خطية عندما لا يمكن إيجاد جذر لهذه المعادلة بالطرق التحليلية لا يبقى لنا سوى خيار واحد هو الطرق العددية، والخوارزميات التي سنستعملها: طريقة التنصيف، طريقة نيوتن – رافسون، طريقة الموقع الكاذب، طريقة النقطة الثابتة، طريقة التكامل (فضيلة والرويعي،2004)، (ناصر، 2001)، (ريتشاردل. بوردين؛ ج. دوغلاس فايرس، 2014)، (صبح والحربي،2006)، (لوكه، 2024)، (لوكه، 2024).

اولاً: الحل التقريبي (جذر المعادلة التقريبي) باستخدام طريقة التنصيف وطريقة الموقع الكاذب وطريقة التكامل:

في الطرق الثلاث (طريقة التنصيف وطريقة الموقع الكاذب وطريقة التصنيف) تعتمد طريقة الحصر على تحديد تخمينين مبدئيين للجذر لبدء عملية التكرار مع اشتراط أن يكون أحد التخمينين على أحد جانبي الجذر المطلوب ايجاده (على يمين الجذر مثلاً)

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

والتخمين الاخر (على يساره) أو العكس وهذا سبب تسمية هذا النوع من الطرق بطرق الحصر أو الطرق المغلقة.

- **طريقة التنصيف:**

هي طريقة تقريبية مبنية اساساً على فكرة التنصيف المتتابع للفترة $(a،b)$، ويمكن تلخيص خطوات طريقة التنصيف كما يلي:

يتم اختيار تخمينين مبدئيين $(a،b)$ بحيث $a < b$ و$f(a)f(b) < 0$ وبما أن أي منها ليس جذراً فإنه يتم حساب تقريب للجذر بتنصيف المسافة بين التخمينين وحساب قيمة المتغير المستقل عند المنتصف x_n بالمعادلة:

$$x_n = \frac{a+b}{2} \qquad \rightarrow (1)$$

فإذا لم تكن x_n هي الجذر فإنه يكون إما في الفترة $(a،x_n)$ أو في الفترة $(x_n،b)$، ويمكن أن نحدد ذلك بإجراء الاختبار التالي:

$$f(a)f(x_n) < 0 \qquad \rightarrow (2)$$

فإن الجذر يقع بين $a،x_n$، وإلا فإنه يقع بين $x_n،b$ نتبنى الفترة الحاوية للجذر ونهمل الأخرى ونقوم بعملية التنصيف مرة أخرى كما في (2)،(1) نحصل على متتالية من الاعداد... $x_1،x_2،$ نتوقف عندما

$$|x_{n+1} - x_n| = |x_n - x_{n-1}| \text{ أو } f(x_n) = 0.$$

- **طريقة الموقع الكاذب:**

طريقة الموقع الكاذب هي خيار اخر لطرق الحصر وهي عبارة عن تحسين لطريقة التنصيف مبني على مفاهيم بيانية.

ويمكن تلخيص خطوات طريقة الموقع الكاذب الى الاتي:

نقوم أولا بتخمين موقع الجذر وذلك بتكوين جدول بقيم الدالة للتعرف على الفترة التي تغير فيها الدالة إشارتها من سالب الى موجب أو العكس، وبذلك تمكنا من تعيين نقطتين $a،b$ يكون بينهما الجذر بحيث يكون $a < b$ و$f(a)f(b) < 0$.

نوجد p باستخدام القانون التالي:

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

$$x_n = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \qquad \rightarrow (1)$$

إذا كانت $f(p)=0$ فإن p جذر الدالة وحلاً لها، وإذا لم تكن p جذر الدالة فإنه يكون إما في الفترة $(a،p)$ أو في الفترة $(p،b)$، ويمكن أن نحدد ذلك بإجراء الاختبار التالي:

$$f(a)f(p) < 0 \qquad \rightarrow (2)$$

فإن الجذر يقع بين $a،p$، وإلا فإنه يقع بين $p،b$ نتبنى الفترة الحاوية للجذر ونهمل الأخرى

نتوقف عندما $|x_{n+1}-x_n| = |x_n - x_{n-1}|$ أو $f(x_n)=0$.

- **طريقة التكامل:**

طريقة التكامل هي خيار اخر لطرق الحصـــر، ويمكن تلخيص خطوات طريقة التكامل الى الاتي:

الخطوة الأولى

- نكامل الدالة $f(x)$ ونفرض أن $c=1$ دائمًا، ونأخذ تفاضل الدالة الجديدة ونرمز له بالرمز $f'(x)$ وهي بالأصل الدالة المراد إيجاد الحل التقريبي لها.
- لتكن $i=(1,2,3,\dots)$، $x_i \in [x_a،x_b]$، ويكون ذلك بتحقيق الشرط $f'(x_a)f'(x_b) < 0$.
- نحسب x_1 (هي العملية الأولى $i=1$) باستعمال المعادلة التالية:

$$x_i = \frac{x_b f(x_b) + x_a f(x_a)}{f(x_a)+f(x_b)} \qquad (1)$$

نحسب $f'(x_1)$ وإذا تحقق الشرط $f'(x_1)=0$ إذا x_i هو الحل.

إذا لم يتحقق الشرط نكمل العملية حسب لخطوة الثانية.

الخطوة الثانية

الحل التقريبي لها في هذه الخطوة نحسب x_2 في مجال جديد كالتالي:

نعلم أن $f'(x_a)f'(x_b) < 0$

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

المرحلة الأولى

إذا كان $f'(x_a) < 0$ فإن $f'(x_b) > 0$، وكانت $f'(x_1) > 0$

نضع $x_b = x_1$ ويصبح المجال $[x_a، x_1]$.

إذا كان $f'(x_a) < 0$ فإن $f'(x_a) > 0$، وكانت $f'(x_1) < 0$

نضع $x_a = x_1$ ويصبح المجال $[x_1، x_b]$.

ثم نحسب x_2 باستعمال المعادلة (3) وإذا تحقق الشرط $f'(x_2) = 0$ إذا x_2 هو الحل.

وإذا لم يتحقق الشرط نكمل الحساب بنفس مراحل الخطوة الثانية حتى يتحقق الشرط $f'(x_i) = 0$ حيث $i = (1,2,3, \dots)$.

المرحلة الثانية

إذا كان $f'(x_a) > 0$ فإن $f'(x_b) < 0$، وكانت $f'(x_1) > 0$

نضع $x_a = x_1$ ويصبح المجال $[x_1، x_b]$.

إذا كان $f'(x_a) > 0$ فإن $f'(x_b) < 0$، وكانت $f'(x_1) < 0$

نضع $x_b = x_1$ ويصبح المجال $[x_a، x_1]$.

ثم نحسب x_2 باستعمال المعادلة (1) وإذا تحقق الشرط $f'(x_2) = 0$ إذا x_2 هو الحل.

وإذا لم يتحقق الشرط نكمل الحساب بنفس مراحل الخطوة الثانية حتى يتحقق الشرط $|x_{n+1} - x_n| = |x_n - x_{n-1}|$ أو $f(x_n) = 0$ حيث $i = (1,2,3, \dots)$.

ثانيًا: الحل التقريبي (جذر المعادلة التقريبي) باستخدام طريقتي نيوتن – رافسون والنقطة الثابتة:

- **طريقة نيوتن – رافسون:**

تعتبر طريقة نيوتن – رافسون من الطرق المفتوحة الأكثر استخداماً لإيجاد اصفار المعادلة بشكل تقريبي دقيق.

يمكن تلخيص خطوات الحل باستخدام طريقة نيوتن – رافسون كالاتي:

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق في $(a،b)$، ولتكن x_0 القيمة الأولية للجذر،

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

$$x_1 = x_0 + h$$
$$\Longrightarrow f(x_1) = f(x_0 + h)$$

نوجد x_{i+1} باستخدام الصيغة التالية:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \ , i = 0,1,2, \dots$$

شرط التقارب بهذه الطريقة:

$$\left|\frac{f(x_0)f''(x_0)}{f'(x_0)}\right| < 1$$

نتوقف عندما $|x_{n+1} - x_n| = |x_n - x_{n-1}|$ أو $f(x_n) = 0$.

- **طريقة النقطة الثابتة:**

من الطرق المفتوحة، ويطلق عليها العديد من الأسماء الأخرى مثل التكرار المباشر والنقطة الواحدة وغيرها ولكننا هنا سنسميها طريقة النقطة الثابتة.

لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية في الصورة العامة $f(x) = 0$ بهذه الطريقة يتم ترتيب المعادلة ووضعها في الصورة $x = g(x)$.

ولكي تكون $x = g(x)$ مناسبة للحصول على الجذر الذي نبحث عنه بحيث يجب توفر شرط التقارب في التخمين المبدئي الذي نبدأ به عملية التكرار لضمان التقارب للجذر المطلوب أي يجب التأكد أن $|g'(x_0)| \leq 1$.

نتوقف عندما $|x_{n+1} - x_n| = |x_n - x_{n-1}|$ أو $f(x_n) = 0$.

المحـــور الثاني: إيجاد القيم الحقيقية والتقريبية لجذور المعادلات الغير خطية لبعض الدوال

لنأخذ ستة أمثلة، وسنجد حلها وفق الطرق الرياضية المباشرة.

<u>أولًا– حساب القيم الحقيقية الدقيقة:</u>

جدول (1) يبين تطبيقات عمليه للمحور الثاني لإيجاد الجذر الحقيقي لبعض الدوال

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

القيمة الحقيقية	الدالة
0.567143	$f(x) = e^{-x} - x = 0$
-1.732050 1.732050 -1	$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$
45	$f(x) = \sin(x) - \cos(x) = 0$

والآن وبعد أن تم ايجاد الجذر الحقيقي تحليلياً سوف نقوم بحساب الجذر(التقريبي) لتلك الدوال وتحديد أفضل الطرق العددية لإيجاد الجذر.

ثانيًا– حساب القيم التقريبية للجذور باستخدام الطرق الأربعة:

- **طريقة إيجاد الجذر التقريبي للمعادلة باستخدام طريقة التنصيف وطريقة الموقع لكاذب وطريقة التكامل:**
  - **بتطبيق طريقة التنصيف لإيجاد جذر المعادلة المتسامية**

$$f(x) = e^{-x} - x$$

الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة التنصيف:

$$x_i = \frac{a+b}{2}$$

لأجل البدء بإيجاد الجذر باستخدام طريقتي التنصيف والموضع الكاذب فلابد من تحديد الفترة التي يقع فيها الجذر، وذلك بعمل جدول بسيط وملاحظة تغير الإشارة عند الانتقال من نقطة الى أخرى.

- الدالة المعطاة $f(x) = e^{-x} - x$ في جدول:

جدول (2) يبين قيم $(x, f(x))$ للمثال (1) بفرض أن $h = 0.1$

x	0.6	0.5	0.4	0.3
$f(x)$	−0.511883	0.106530	0.270320	0.440818

بوضوح نلاحظ أن الجذر يقع بين $b = 0.6, a = 0.5$، وباتباع خطوات طريقة التنصيف يمكن تلخيص الحل كما بالجدول التالي:

جدول (3) يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة التنصيف

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

i	a	b	f(a)	f(b)	x_n	$f(x_n)$	$\lvert\varepsilon_a\rvert\% = \left\lvert\frac{\bar{x}-x}{\bar{x}}\right\rvert \times 100$	$\lvert\varepsilon_t\rvert\% = \left\lvert\frac{x^{new}-x^{old}}{x^{new}}\right\rvert \times 100$
0	0.5	0.6	0.106530	−0.051188	0.55	0.026949	-	3.022694%
1	0.55	0.6	0.026949	−0.051188	0.575	−0.012295	4.347826%	1.385364%
2	0.55	0.575	0.026949	−0.012295	0.5625	0.007282	2.222222%	0.818664%
3	0.5625	0.575	0.007282	−0.012295	0.56875	−0.002517	1.098901%	0.283350%
4	0.5625	0.56875	0.007282	−0.002517	0.565625	0.002380	0.552486%	0.267657%
5	0.565625	0.56875	0.002380	−0.002517	0.567187	0.002380	0.275394%	0.007581%
6	0.565625	0.567187	0.002380	0.002380	0.566406	0.001559	0.137886%	0.129949%
7	0.566406	0.567187	0.001559	0.002380	0.566796	0.000544	0.068807%	0.061183%
8	0.566796	0.567187	0.000544	0.002380	0.566991	0.000238	0.026801%	0.103176%
9	0.566991	0.567187	0.000238	0.002380	0.567048	0.000149	0.016750%	0.010052%
10	0.567048	0.567187	0.000149	0.002380	0.567117	0.000041	0.004584%	0.012166%
11	0.567117	0.567187	0.000041	0.002380	0.567152	−0.000013	0.004584%	0.006171%
12	0.567117	0.567152	0.000041	−0.000013	0.567134	0.000014	0.001586%	0.003173%
13	0.567134	0.567152	0.000014	−0.000013	0.567143	0.000000	0%	0.001586%

نتوقف عند أربعة عشر تكرار تكرار لأن $f(x_n) = 0$

وبالتالي جذر المعادلة $f(x) = e^{-x} - x$ باستخدام هذه الطريقة 0.567143

وبنسبة خطأ 0%.

- **بتطبيق طريقة الموقع الكاذب لإيجاد جذر المعادلة المتسامية:**

الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة الموقع الكاذب:

$$x_n = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

جدول (4) يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة الموقع الكاذب

i	a	b	f(a)	f(b)	x_n	$f(x_n)$	$\lvert\varepsilon_a\rvert\%$	$\lvert\varepsilon_t\rvert\%$
0	0.5	0.6	0.106530	−0.051188	0.567544	−0.000627	-	0.070705%
1	0.5	0.567544	0.106530	−0.000627	0.567148	−0.000007	0.069823%	0.000881%
2	0.5	0.567148	0.106530	−0.000007	0.567143	0.000000	0.000881%	0%

نتوقف عند ثلاث تكرارات لأن$f(x_n) = 0$

وبالتالي جذر المعادلة $f(x) = e^{-x} - x$ باستخدام هذه الطريقة 0.567143

وبنسبة خطأ 0%.

- **طريقة التكامل:**

$$f(x) = e^{-x} — x$$

$$\because f(x) = e^{-x} - -x$$

$$\therefore \int f'(x_1)dx = \int (e^{-x} - x)dx = -e^{-x} - 0.5\,x^2 + c$$

$$\cong -e^{-x} - 0.5x^2 + 1$$

على فرض أن $c = 1$ دائمًا.

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

الصيغة العامة لطريقة التكامل:

$$x_i = \frac{x_b f(x_b) + x_a f(x_a)}{f(x_a) + f(x_b)} \ , i = 0,1,2, \dots$$

جدول (5) يبين نتائج الحل التقريبي للدالة $f(x) = e^{-x} - x$ باستخدام طريقة التكامل

$f(x) = -e^{-x} - 0.5x^2 + 1$					$f'(x) = e^{-x} - x$			
i	x_a	x_b	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f'(x_a)$	$f'(x_b)$	x_i	$f'(x_i)$
0	0.567140	0.567144	0.272030	0.272030	0.000000	0.000000		
1	0.567140	0.567144	0.272030	0.272030	0.000000	0.000000	0.567142	0.000002
2	0.567142	0.567144	0.250434	0.272030	0.000002	0.000000	0.567143	0.000000
	0.567144	0.567143	0.250434	0.149285	0.000000	0.000000	0.567143	0.000000

نتوقف عند ثلاث تكرارات لأن $f(x_n) = 0.000000$

إذا $f(x_a) = f(x_a) = 0$ فإنه بالإمكان اختيار $x_a = x_i$ او $x_b = x_i$ ففي كلتا الحالتين ستكون x_i الجديدة متساوية .

وبالتالي جذر المعادلة $f(x) = e^{-x} - x$ باستخدام هذه الطريقة 0.567143 وبنسبة خطأ 0.0%.

- **طريقة إيجاد الجذر التقريبي للمعادلة باستخدام طريقتي نيوتن – رافسون والنقطة الثابتة:**
  - **بتطبيق طريقة نيوتن – رافسون لإيجاد جذر المعادلة المتسامية**

$$f(x) = e^{-x} - x$$

الصيغة العامة لطريقة نيوتن – رافسون:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \ , i = 0,1,2, \dots$$

لأجل البدء بإيجاد الجذر باستخدام طريقتي نيوتن – رافسون والنقطة الثابتة فلا بد من تحديد تخمين مبدئي وليكن $x_0 = 0.5$ وكذلك يتطلب استخدام هذه الطريقة إيجاد المشتقة الأولى والثانية للدالة $f(x)$ وهي:

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$
$$f''(x) = e^{-x}$$

ولكي نتأكد أن x_0 اختيار مناسب يضمن لنا التقارب لجذر الدالة نتحقق من شرط التقارب وهو:

$$\left| \frac{f(x_0) f''(x_0)}{f'(x_0)} \right| < 1$$

$$f(0.5) = e^{-0.5} - 0.5 = 0.106530$$

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

$$f'(x) = -e^{-0.5} - 1 = -1.606530$$
$$f''(x) = e^{-0.5} = 0.606530$$
$$\therefore \left|\frac{0.106530 * 0.606530}{-1.606530}\right| = 0.094021 < 1$$

بالتعويض في الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة نيوتن– رافسون نستطيع وضع معادلة التكرار للدالة الحالية:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$

وتلخص الحسابات بالجدول التالي:

جدول (6) يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة نيوتن – رافسون

i	x_n	$\|\varepsilon_a\|\%$	$\|\varepsilon_t\|\%$
0	0.500000	–	11.838813%
1	0.566311	11.709290%	0.146700%
2	0.567143	0.146700%	0%

إن تساوي القيم الحقيقية مع القيم التقريبية في هذا المثال ليس دقيقً تماماً بل هناك فرق صغير جداً.

نتوقف عند أربعة تكرارات لأن $f(x_n) = 0$ وبالتالي جذر المعادلة $f(x) = e^{-x} - x$ باستخدام هذه الطريقة 0.567143 وبنسبة خطأ 0%.

- **بتطبيق طريقة النقطة الثابتة لإيجاد جذر المعادلة المتسامية**

$$f(x) = e^{-x} - x$$

الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة النقطة الثابتة:

يتم وضع المعادلة ترتيبها على الصورة $x = g(x)$ ، سوف نبدأ الحل باستخدام ابسط صورة ممكنة لترتيب المعادلة في الصيغة المطلوبة وهي:

$$x_{i+1} = g(x_i) = e^{-x_i}$$

ولكي يكون اختيارنا مناسب للدالة $g(x)$ هناك شرط يعرف بشرط التقارب وهو

$$|g'(x)| \leq 1$$
$$|g'(x)| < 1$$
$$|g'(x)| = |-e^{-x}|$$
$$|g'(0.5)| = |-e^{-0.5}| = 0.606530 < 1$$

من الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة النقطة الثابتة نحصل على النتائج الموضحة بالجدول التالي:

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

جدول (7) يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة النقطة الثابتة

i	x_i	$\|\varepsilon_a\|\%$	$\|\varepsilon_t\|\%$
0	0.500000	–	11.838813%
1	0.606530	17.563846%	6.944809%
2	0.545239	11.241125%	3.862165%
3	0.579703	5.945113%	2.214609%
4	0.560064	1.849967%	1.248186%
5	0.571172	1.944773%	0.710402%
6	0.564863	1.116907%	0.402015%
7	0.568438	0.628916%	0.228337%
8	0.566409	0.358221%	0.129420%
9	0.567559	0.202622%	0.073350%
10	0.566907	0.115010%	0.041612%
11	0.567277	0.065223%	0.023627%
12	0.567067	0.037032%	0.013400%
13	0.567186	0.020980%	0.007581%
14	0.567119	0.011814%	0.004231%
15	0.567157	0.006700%	0.002468%
16	0.567135	0.003879%	0.001410%
17	0.567147	0.002115%	0.000705%
18	0.567141	0.001057%	0.000352%
19	0.567144	0.000528%	0.000176%
20	0.567142	0.000252%	0.0001%
21	0.567144	0.000528%	0.000176%
22	0.567142	0.000252%	0.000176%

نتوقف عند اثنان وعشرين تكرار لأن

$$|0.567142 - 0.567144| = |0.567144 - 0.567142|$$
$$\Longrightarrow 0.000002 = 0.000002$$

في هذا المثال لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية (المتسامية) طريقة نيوتن – رافسون، وطريقة الموقع الكاذب أعطيتا نتيجة أدق من الطرق الأخرى بعدد تكرارات اقل حيث

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

كان ناتج إيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام هذه الطريقة يساوي 0.567143 وبنسبة خطا 0%.

- **بتطبيق طريقة التنصيف لإيجاد جذر المعادلة المتسامية**

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$$

الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة التنصيف:

$$x_i = \frac{a+b}{2}$$

لأجل البدء بإيجاد الجذر باستخدام طريقتي التنصيف والموضع الكاذب فلابد من تحديد الفترة التي يقع فيها الجذر، وذلك بعمل جدول بسيط وملاحظة تغير الإشارة عند الانتقال من نقطة الى أخرى.

- الدالة المعطاة $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ في جدول:

جدول (8) يبين قيم $(x, f(x))$ للمثال (1) بفرض أن $h = 1$

x	−1	0	1	2
$f(x)$	0	−3	−4	3

بوضوح نلاحظ أن الجذر يقع بين $a = 1, b = 2$، وباتباع خطوات طريقة التنصيف يمكن تلخيص الحل كما بالجدول التالي:

جدول (9) يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة التنصيف

i	a	b	f(a)	f(b)	x_n	$f(x_n)$	$\|\varepsilon_a\|\%$	$\|\varepsilon_t\|\%$
0	1	2	−4	3	1.5	−1.875	-	13.397419%
1	1.5	2	−1.875	3	1.75	0.171875	14.285714%	1.033442%
2	1.5	1.75	−1.875	0.171875	1.625	−0.943359	7.692307%	6.180537%
3	1.625	1.75	−0.943359	0.171875	1.6875	−0.409423	3.703703%	2.572096%
4	1.6875	1.75	−0.409423	0.171875	1.71875	−0.124786	1.818181%	0.767876%
5	1.71875	1.75	−0.124786	0.171875	1.734375	0.022029	0.009009%	0.007668%
6	1.71875	1.734375	−0.124786	0.022029	1.72675	0.049993	0.441581%	0.305995%
7	1.71875	1.72675	−0.124786	0.049993	1.722275	−0.091928	0.564360%	0.259830%
8	1.722275	1.72675	−0.091928	0.049993	1.724512	−0.070996	0.435206%	0.129153%
9	1.724512	1.72675	−0.070996	0.049993	1.725541	−0.061347	0.375797%	0.059633%
10	1.725541	1.72675	−0.061347	0.049993	1.726145	−0.055677	0.340925%	0.034991%
11	1.726145	1.72675	−0.055677	0.049993	1.726447	−0.052840	0.323489%	0.017492%
12	1.726447	1.72675	−0.052840	0.049993	1.726598	−0.051421	0.315765%	0.008745%
13	1.726598	1.72675	−0.051421	0.049993	1.726674	−0.057070	0.310383%	0.000044%
14	1.726674	1.72675	−0.057070	0.049993	1.726712	−0.050350	0.308189%	0.002200%
15	1.726712	1.72675	−0.050350	0.049993	1.726731	−0.050171	0.307092%	0.000011%
16	1.726731	1.72675	−0.050171	0.049993	1.726740	−0.050087	0.306573%	0.000052%
17	1.726740	1.72675	−0.050087	0.049993	1.726745	−0.050040	0.306573%	0.000289%
18	1.726745	1.726745	−0.050040	0.049993	1.726745	−0.050040	0.306573%	0%
19	1.726745	1.726745	−0.050040	0.049993	1.726745	−0.050040	0.306573%	0%

نتوقف عند عشرين تكرار لأن

$$|1.726745 - 1.726745| = |1.726745 - 1.726745| \Longrightarrow 0 = 0$$

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

وبالتالي جذر المعادلة $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ باستخدام هذه الطريقة هو 1.726745 وبنسبة خطأ 0%.

- **بتطبيق طريقة الموقع الكاذب لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية**

الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة الموقع الكاذب:

$$x_n = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

جدول (10) يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة الموقع الكاذب

i	a	b	f(a)	f(b)	x_n	$f(x_n)$	$\|\epsilon_a\|\%$	$\|\epsilon_t\|\%$
0	1	2	−4	3	1.571428	−1.364435	-	9.273519%
1	1.571428	2	−1.364435	3	1.705410	−0.247752	7.856292%	1.538061%
2	1.705410	2	−0.247752	3	1.575314	−1.335006	8.258390%	9.049161%
3	1.575314	2	−1.335006	3	1.70610	−0.241445	7.665787%	9.049161%
4	1.706100	2	−0.241445	3	1.727991	−0.038320	1.266846%	0.234346%
5	1.727991	2	−0.038320	3	1.731421	−0.005958	0.198103%	0.036315%
6	1.731421	2	−0.005958	3	1.731953	−0.000925	0.030716%	0.005600%
7	1.731953	2	−0.000925	3	1.732035	−0.000149	0.004734%	0.000866%
8	1.732035	2	−0.000149	3	1.732048	−0.000026	0.000750%	0.000115%
9	1.732048	2	−0.000026	3	1.732050	−0.000007	0.000115%	0%

نتوقف عند عشر تكرارات لأن $f(x_9) = 0$ ، وبالتالي جذر المعادلة $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ باستخدام هذه الطريقة 1.732050وبنسبة خطأ0%.

- **طريقة التكامل:**

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$$

$$\because f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$$

جدول (11) يبين نتائج الحل التقريبي للدالة $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ باستخدام طريقة التكامل

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$ $\qquad$ $f'(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$

i	x_a	x_b	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f'(x_a)$	$f'(x_b)$	x_i	$f'(x_i)$
0	1	2	−2.916666	−4.333333	−4	3		
1	1	2	−2.916666	−4.333333	−4	3	1.597701	-1.162085
2	1.597701	2	-4.633615	−4.333333	−1.162085	3	1.792119	0.591065
3	1.597701	1.792119	-4.633615	-4.696576	−1.162085	0.591065	1.695564	-0.337114
4	1.695564	1.792119	-4.707901	-4.696576	-0.337114	0.591065	1.743783	0.111889
5	1.695564	1.743783	-4.707901	-4.713446	-0.337114	0.111889	1.719725	-0.115695
6	1.719725	1.743783	-4.713386	-4.713446	-0.115695	0.111889	1.732050	0.00000

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

$$\therefore \int f'(x_1)dx = \int (x^3 + x^2 - 3x - 3)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + c \cong \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$$

على فرض أن $c = 1$ دائمًا.

الصيغة العامة لطريقة التكامل:

$$x_i = \frac{x_b f(x_b) + x_a f(x_a)}{f(x_a) + f(x_b)}, i = 0,1,2, \dots$$

نتوقف عند سبع تكرارات لأن $f(x_n) = 0.000000$

وبالتالي جذر المعادلة $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ باستخدام هذه الطريقة 1.732050 وبنسبة خطأ 0%

- **طريقة إيجاد الجذر التقريبي للمعادلة باستخدام طريقتي نيوتن – رافسون والنقطة الثابتة:**

ملاحظة:

1. لم نتمكن من تطبيق طريقة نيوتن – رافسون وذلك لأننا لم نتمكن من إيجاد تخمين مبدئي يحقق لنا شرط التقارب للجذر 1.732050
2. عند التعويض عن xب -1 في المعادلة $f(x) = x^3 + x^2 - 3x -$ 3 نجد أن $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) - 3 = 0$ ، وهذا يعني أن -1 هو أحد جذور هذه المعادلة.

- **بتطبيق طريقة النقطة الثابتة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية**

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$$

الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة النقطة الثابتة:

يتم وضع المعادلة ترتيبها على الصورة $x = g(x)$:

$$x_{i+1} = g(x_i) = (3x - x^2 + 3)^{\frac{1}{3}}$$

ولكي يكون اختيارنا مناسب للدالة $g(x)$ هناك شرط يعرف بشرط التقارب وهو $|g'(x)| \leq 1$

$$|g'(x)| < 1$$

$$|g'(x)| = \left|\frac{1}{3}(3x - x^2 + 3)^{-\frac{2}{3}}(3 - 2x)\right|$$

$$|g'(0)| = \left|\frac{1}{3}(3(0) - (0)^2 + 3)^{-\frac{2}{3}}(3 - 2(0))\right| = 0.480749 < 1$$

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

نختار $x_0 = 0$

من الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة النقطة الثابتة

نحصل على النتائج الموضحة بالجدول التالي:

جدول (12) يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة الموقع الكاذب

i	x_i	$\|\varepsilon_a\|\%$	$\|\varepsilon_t\|\%$
0	0	-	
1	1.442249	100%	7.029185%
2	1.737645	16.99978%	0.323027%
3	1.731758	0.339943%	0.016858%
4	1.732065	0.017724%	0.000866%
5	1.732049	0.000009%	0.000057%

نتوقف عند سبع تكرارات لأن $f(x_n) = 0$

وبالتالي جذر المعادلة $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ باستخدام هذه الطريقة 1.732050 وبنسبة خطأ 0%.

في هذا المثال لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية طريقة النقطة الثابته أعطت نتيجة أدق من الطرق الأخرى بعدد تكرارات اقل حيث كان ناتج إيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام هذه الطريقة يساوي 1.732050 وبنسبة خطا 0%.

- **طريقة إيجاد الجذر التقريبي للمعادلة باستخدام طريقتي التنصيف والموقع لكاذب:**
  - **بتطبيق طريقة التنصيف لإيجاد جذر المعادلة المتسامية**

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة التنصيف:

$$x_i = \frac{a+b}{2}$$

لأجل البدء بإيجاد الجذر باستخدام طريقتي التنصيف والموضع الكاذب فلابد من تحديد الفترة التي يقع فيها الجذر، وذلك بعمل جدول بسيط وملاحظة تغير الإشارة عند الانتقال من نقطة الى أخرى.

الدالة المعطاة $f(x) = \sin x - \cos x$ في جدول:

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

جدول (13) يبين قيم $(x, f(x))$ للمثال (1) بفرض أن $h = 5$

x	0	10	20	30	40	50
$f(x)$	−1	−0.811159	−0.597672	−0.366025	−0.123256	0.123256

بوضوح نلاحظ أن الجذر يقع بين $b = 50, a = 40$، وباتباع خطوات طريقة التنصيف يمكن تلخيص الحل كما بالجدول التالي:

جدول (14) يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة التنصيف

i	a	b	f(a)	f(b)	x_n	$f(x_n)$	$\|\varepsilon_a\|\%$	$\|\varepsilon_t\|\%$
0	40	50	−0.123256	0.123256	45	0	−	0%

نتوقف عند تكرار واحد تكرارات لأن $f(x_0) = 0$ وبالتالي فان 45 هي جذر للمعادلة $f(x) = \sin x - \cos x$ وبنسبة خطأ 0%

- **بتطبيق طريقة الموقع الكاذب لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية**

الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة الموقع الكاذب:

$$x_n = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

جدول (15) يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة الموقع الكاذب

i	a	b	f(a)	f(b)	x_n	$f(x_n)$	$\|\varepsilon_a\|\%$	$\|\varepsilon_t\|\%$
0	40	50	−0.123256	0.123256	45	0	−	0%

نتوقف عند تكرار واحد تكرارات لأن $f(x_0) = 0$ وبالتالي فان 45 هي جذر للمعادلة $f(x) = \sin x - \cos x$ وبنسبة خطأ 0%.

- **طريقة التكامل:**

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

$$\because f(x) = \sin x - \cos x$$

$$\therefore \int f'(x_1)dx = \int (\sin x + \cos x)dx = -\cos x + \sin x + c$$
$$\cong -\cos x + \cos x + 1$$

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

على فرض أن $c = 1$ دائمًا.

الصيغة العامة لطريقة التكامل:

$$x_i = \frac{x_b f(x_b) + x_a f(x_a)}{f(x_a) + f(x_b)} \ , i = 0,1,2, \dots$$

جدول (14) يبين نتائج الحل التقريبي للدالة $f(x) = \sin x - \cos x$ باستخدام طريقة التكامل

نتوقف عند ثلاثة عشر تكرار لأن$f(x_n) = 0$

وبالتالي جذر المعادلة $f(x) = \sin x - \cos x$ باستخدام هذه الطريقة

45.015482 وبنسبة خطأ 0.051546%

- **طريقة إيجاد الجذر التقريبي للمعادلة باستخدام طريقتي نيوتن – رافسون والنقطة الثابتة:**
  - **بتطبيق طريقة نيوتن – رافسون لإيجاد جذر المعادلة المتسامية**

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

الصيغة العامة لطريقة نيوتن – رافسون:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \ , i = 0,1,2, \dots$$

لأجل البدء بإيجاد الجذر باستخدام طريقتي نيوتن – رافسون والنقطة الثابتة فلا بد من تحديد تخمين مبدئي وليكن $x_0 = 40$وكذلك يتطلب استخدام هذه الطريقة إيجاد المشتقة الأولى والثانية للدالة $f(x)$ وهي:

$$f'(x) = \cos x + \sin x$$
$$f''(x) = -\sin x + \cos x$$

ولكي نتأكد أن x_0 اختيار مناسب يضمن لنا التقارب لجذر الدالة نتحقق من شرط التقارب وهو:

$$\left| \frac{f(x_0) f''(x_0)}{f'(x_0)} \right| < 1$$

$$f(40) = \cos(40) - \sin(40) = 0.123256$$

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

جدول (15) يبين نتائج التكرار باستخدام طريقة نيوتن – رافسون

I	x_n	$\|\varepsilon_a\|\%$	$\|\varepsilon_t\|\%$
0	40	–	11.11111%
1	40.087488	0.218242%	10.916693%
2	40.173438	0.216200%	10.725704%
3	40.257877	0.209745%	10.538062%
4	40.340832	0.205635%	10.353717%
5	40.422329	0.201613%	10.172613%
6	40.502394	0.197679%	9.994691%
⋮	⋮	⋮	⋮
904	44.999999		
905	44.999999	0.000002%	0%

$$f'(40) = -\sin(40) - \cos(40) = -1.408832$$
$$f''(40) = -\cos(40) + \sin(40) = -0.123256$$
$$\therefore \left|\frac{0.123256 * -0.123256}{-1.408832}\right| = 0.010783 < 1$$

بالتعويض في الصيغة العامة لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية باستخدام طريقة نيوتن–رافسون نستطيع وضع معادلة التكرار للدالة الحالية:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}$$

نتوقف عند التكرار تسعمئة وستة لأن

$$|x_{906} - x_{905}| = |x_{905} - x_{904}|$$
$$= |44.999999 - 44.999999| = 0$$

وبالتالي جذر المعادلة $f(x) = e^{-x} - x$ باستخدام هذه الطريقة 44.999999 وبنسبة خطأ0%.

ملاحظة:

1. من خلال هذا المثال أنه إذا كانت الدالة غير قابلة للفصل فإن إيجاد الجذر التقريبي باستخدام طريقة نيوتن رافسون سيكون بطيء ويحتاج لعدد كبير من التكرارات فمن الأفضل في هذه الحالة اختيار طريقة أخرى.
2. لا يمكن تطبيق طريقة النقطة الثابتة على هذا المثال لعدم إمكانية فصل x عن الدالة لان x في هذه الدالة هو عبارة عن زاوية الدالة.

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

الاستنتـــاجات والتوصيـــات:

لأجل مقارنة النتائج ومعرفة تأثير نوع الدالة على هذه النتائج لهذه الطرق العددية لنكتبها على

شكل جدول ليتسنى لنا ملاحظة الفرق بينها من حيث تقارب القيم التقريبية مع القيم الحقيقية:

جدول (16) يبين القيم الحقيقية والتقريبية لجذور المعادلات الغير خطية

الدالة	القيمة الحقيقية	الطرق المغلقة			الطرق المفتوحة	
		باستخدام طريقة التصنيف	باستخدام طريقة الموقع الكاذب	باستخدام طريقة التكامل	باستخدام طريقة نيوتن رافسون	باستخدام طريقة النقطة الثابتة
$f(x) = e^{-x} - x = 0$	0.567143	0.567143	0.567143	0.567143	0.567143	0.567144
الدالة	القيمة الحقيقية	الطرق المغلقة			الطرق المفتوحة	
		باستخدام طريقة التصنيف	باستخدام طريقة الموقع الكاذب	باستخدام طريقة التكامل	باستخدام طريقة النقطة الثابتة	
$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$	1.732050	1.726745	1.732050	1.732050	1.732050	
الدالة	القيمة الحقيقية	الطرق المغلقة			الطرق المفتوحة	
		باستخدام طريقة التصنيف	باستخدام طريقة الموقع الكاذب	باستخدام طريقة التكامل	باستخدام طريقة النقطة الثابتة	
$f(x) = \sin x - \cos x = 0$	45	45	45	45.015482	44.999999	

جدول (17) يبين الخطأ النسبي المئوي لجذر المعادلة الغير خطية التقريبي

الدالة	القيم التقريبية				
	باستخدام طريقة التصنيف	باستخدام طريقة الموقع الكاذب	باستخدام طريقة التكامل	باستخدام طريقة نيوتن رافسون	باستخدام طريقة النقطة الثابتة
$f(x) = e^{-x} - x = 0$	0%	0%	0%	0%	0.000176%
الدالة	القيم التقريبية				
	باستخدام طريقة التصنيف	باستخدام طريقة الموقع الكاذب	باستخدام طريقة التكامل	باستخدام طريقة النقطة الثابتة	
$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$	0%	0%	0%	0%	
الدالة	القيم التقريبية				
	باستخدام طريقة التصنيف	باستخدام طريقة الموقع الكاذب	باستخدام طريقة التكامل	باستخدام طريقة النقطة الثابتة	
$f(x) = \sin x - \cos x = 0$	0%	0%	0%	0%	

وبعد أن تم حساب جذر المعادلة الغير خطية تحليليًا وعدديًا تم التوصل إلى الناتج التالية:

إذا كانت القيمة الحقيقة لجذر المعادلة الغير خطية عدد صحيح فإن ناتج الجذر التقريبي (العددي) لأي دالة باستخدام طريقة التنصيف تكون دقيقة جدًا ومدى تقاربها من القيم

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

الحقيقية للجذر هي الأفضل، فإذا تم اختيار $a، b$ بدقة[1] (بحيث يكون $a، b$ عددين صحيحين) على النحو التالي:

$$a = x_n - 1، b = x_n + 1$$
$$a = x_n - 2، b = x_n + 2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a = x_n - i، b = x_n + i$$

وحتى وإن لم تكن قيمة الجذر معطاة في السؤال وحققت طريقة التصنيف شرط التوقف $f(x_0) = 0$ من أول تكرار فهذا يدل على وجود نسق معين بين $a، b$ كما هو مذكور أعلاه بالأعلى.

1. يمكن حل المعادلة الغير خطية وإيجاد الجذر باستخدام الطرق العددية حتى وإن لم يكن شرط التوقف (ε) مذكور في المسألة، وذلك عن طريق تحقيق أحد الشرطين التاليين:

$|x_{n+1} - x_n| = |x_n - x_{n-1}|$ أو $f(x_n) = 0$

ولنطلق عليهم اسم شرط التوقف الداخلي.

2. تساوي القيم الحقيقية مع القيم التقريبية للجذر لا يعني أن الطريقة العددية التي تم استخدامها لإيجاد الجذر دقيقة مئة في المئة حيث أنه تم تقريب النتائج الحسابية لستة أرقام عشرية.

3. طريقة التكامل تعطي نتائج أدق من كل الطرق الأخرى لإيجاد الجذور مقارنة بالجذر الدقيق، وبأقل عدد من التكرارات.

4. لا يمكن تطبيق طريقة نيوتن – رافسون لإيجاد جذر المعادلة الغير خطية إذا لم نتمكن من إيجاد تخمين مبدئي يحقق لنا شرط التقارب للجذر.

5. عدم إمكانية تطبيق طريقة النقطة الثابتة عندما تكون الدالة غير قابلة للفصل (بمعنى أن فصل x عن الدالة غير ممكن).

6. يتحكم التخمين المبدئي في إمكانية أو عدم إمكانية تطبيق طريقة نيوتن رافسون على الدالة لإيجاد الجذر التقريبي، فإذا كان التخمين المبدئي يحقق شرط التقارب للجذر فإنه بالإمكان تطبيق طريقة نيوتن رافسون على هذه الدالة، وإذا لم نتمكن من إيجاد التخمين المبدئي الذي يحقق شرط التقارب للجذر فإنه لا يمكن تطبيق هذه الطريقة.

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية

http://www.doi.org/10.62341/haml2018

المـــــراجـــــع:

1. سعد فضيلة، ؛ محمد الرويعي، النفاتي عمر (2004)، "التحليل العددي للمهندسين"، الطبعة الأولى، طرابلس: منشورات مكتب البحوث والاستشارات الهندسية، الصفحات 140–144.
2. صفاء ناصر (2015)، "الرياضيات والتحليل العددي"، عمان: دار اليازوري للنشر والتوزيع، الصفحات 177-216.
3. ريتشاردل. بوردين؛ ج. دوغلاس فايرس (2014)، التحليل العددي. ترجمة ا. د محمد صبحي أبو صالح، المملكة العربية السعودية: العبيكان للنشر، ص45.
4. محمد صبح؛ صالح الحربي (2006)، "التحليل العددي وطرق حسابه العددية"، الطبعة الأولى، الرياض: مكتبة الرشد للنشر، الصفحات 23–97.
5. هناء لوكه (2024)، *دراسة العلاقة بين نوع المعادلة الغير خطية والتخمين المبدئي على نتائج جذور المعادلة الغير خطية باستخدام الطرق المفتوحة ذات شرط التوقف الداخلي*، المجلد الأول، المجلة الدولية للعلوم والتقنية، العدد الخامس والثلاثون، الصفحات 1–20:
https://www.stcrs.com.ly/istj/docs/volumes/Open%20Numerical%20Methods.pdf
6. هناء لوكه (2024)، *إيجاد الحل التقريبي للمعادلة الغير خطية في متغير واحد باستخدام التكامل*، مجلة القلم، المجلد السابع، العدد الرابع، الصفحات 1094–1099:
https://www.journal.utripoli.edu.ly/index.php/Alqalam/article/view/653

Copyright © ISTJ
حقوق الطبع محفوظة
للمجلة الدولية للعلوم والتقنية